

Programmierter Text
Frage-Antwort-System
Training in 60 Schritten

Geometrie

Klassenstufe 8/9

Satz des Pythagoras mit Anwendungen

Ein Lernprogramm in 60 Schritten
zum Nachlernen und Wiederholen

mit abschließendem Fitnesstest

Datei Nr. 11315

Friedrich Buckel

23. Januar 2009

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

!!! Arbeitsanweisung !!!

Dieser Text ist etwas ganz Besonderes. Hier wird ein großes Thema in 60 Lern- und Trainingseinheiten aufgeteilt, so dass sich Erklärung mit Aufgabe und Lösung fortwährend abwechseln. Damit bleibt die zu lösende Aufgabenstellung überschaubar klein. Wichtig ist, dass man hier eine sorgfältige Heftführung durchzieht: Man schreibe sich die Nummer des Lernschrittes auf, dann die Formel oder was wichtiges erklärt wird. Dann löse man die kleine Aufgabe. ERST DANN geht man zum nächsten Abschnitt, der auf der Folgeseite steht. Dort vergleicht man seine Lösung. Musste man nachsehen, weil man nicht wusste, wie man vorgehen sollte, dann sollte man nach dem Anschauen der Lösung diese unbedingt nochmals alleine versuchen und ins Heft schreiben. Ich empfehle auch, den ganzen Text vor dem Bearbeiten auszudrucken!

Achtung: Damit man nicht gleich die Lösung vor Augen hat, arbeite man zuerst die oberen Abschnitte 1, 2, 3 usw. durch bis 20, dann fängt man wieder vorne bei 21 an usw.

Wer diese Abschnitte nur durchliest, hat wenig Nutzen davon, denn Lernen geschieht durch aktives Betätigen des Gehirns, und Schreiben steht da an oberster Stelle!

Man kann oder sollte vielleicht einige Abschnitte im Zusammenhang wiederholen, wenn der Stoff schwer war. Jeder hat sein eigenes Niveau und daher kann ich dieses Thema nicht für jeden gleich gut gestalten.

Am Ende folgt eine Zusammenstellung der Methoden und Formeln sowie ein Fitnesstest. Dieser zeigt dann, wie gut man gearbeitet bzw. wiederholt hat, und ob man ggf. nochmals einige Abschnitte durcharbeiten sollte.

Die Erfahrung zeigt, dass diese Form des programmierten Lernens am effektivsten sein kann. Vorausgesetzt, man geht sinnvoll damit um. Daher ist der erste Absatz dieser Anweisung unbedingt einzuhalten.

Es gibt einige Texte, die zu Teilen dieses Textes passen:

11311	Geometrie – Pythagoras
11312	Geometrie – Kathetensatz
11313	Geometrie – Höhensatz
11321	Tetraeder
11710	Koordinatengeometrie
11512	Kreisteile

Inhalt

Grundlagen:

Übungen zur einfachen Handhabung des Satzes von Pythagoras:	1 bis 18
--	----------

Anwendungen:

Diagonale im Rechteck	18 bis 20
z. B.: Diagonale im Quadrat	20 bis 23
Das gleichschenklige Dreieck	23 bis 27
z. B. Das gleichseitige Dreieck	27 bis 31
Raumdiagonale im Quader	31 bis 32
z. B. Raumdiagonale im Würfel	32 bis 34
Quadratische Pyramiden	34 bis 44
Kathetensatz	45 bis 48
Höhensatz	49 bis 50
Spezielle Pyramidenaufgabe (!)	47 bis 50
Kreissegment	51 bis 55
Längenberechnung im Koordinatensystem	56 bis 60

Nachwort	Seite 21
-----------------	----------

Lernblatt zum Satz des Pythagoras (Ergebnisse aus diesem Heft!)	Seite 22
---	----------

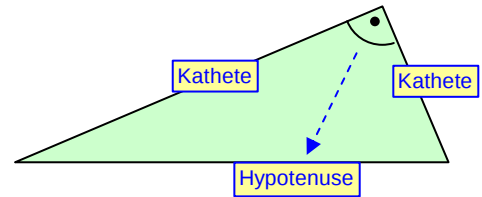
Fitnessstest	Seite 24
---------------------	----------

Lösungen dazu	Seite 26 - 33
----------------------	---------------

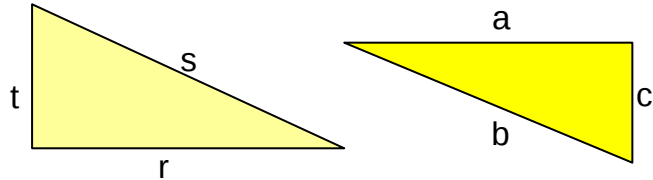
1 Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks haben besondere Namen:

Die den rechten Winkel gegenüber liegende Seite heißt **Hypotenuse**.

Die beiden Schenkel des rechten Winkels heißen **Katheten**.



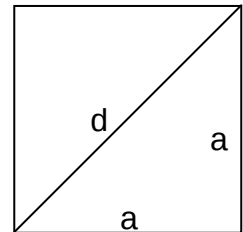
☒ Schreibe auf, welches die Katheten und wer die Hypotenuse ist !



21 Für die Länge einer Diagonale eines Quadrats folgt aus dem Satz des Pythagoras:

$$d^2 = a^2 + a^2 \quad \text{also} \quad d^2 = 2a^2$$

Daraus zieht man die Wurzel: $d = \sqrt{2a^2}$



Und dies ergibt

$$d = a\sqrt{2}$$

☒ Wie lang ist also die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 8 cm ?

41

Gegeben ist eine senkrechte quadratische Pyramide durch $a = 14,3 \text{ cm}$ und $k = 25,0 \text{ cm}$

1. Schritt: Berechnung der Pyramidenhöhe h .

Im Dreieck MCS gilt nach Pythagoras:

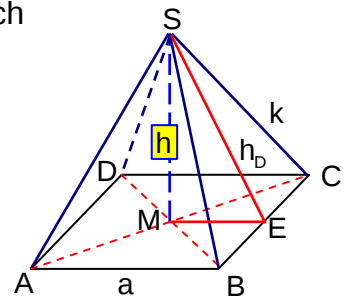
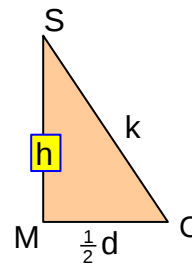
$$k^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = h^2 + \frac{1}{4}d^2$$

Ersetzen: $d^2 = 2a^2$ (denn d ist ja nicht bekannt)

$$k^2 = h^2 + \frac{1}{4} \cdot 2a^2 = h^2 + \frac{1}{2}a^2$$

Umstellen nach h (was ja gesucht ist): $h^2 = k^2 - \frac{1}{4}d^2 = k^2 - \frac{1}{4} \cdot 2a^2 = k^2 - \frac{1}{2}a^2$

Einsetzen: $h = \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}a^2} = \sqrt{(25^2 - \frac{1}{2} \cdot 14,3^2)} \text{ cm} \approx 22,9 \text{ cm}$.

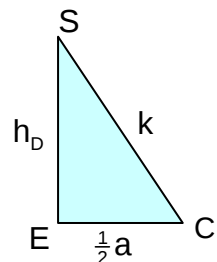


2. Schritt: Berechnung der Dachhöhe h_D im Dreieck ECS

Nach Pythagoras folgt $k^2 = h_D^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h_D^2 + \frac{1}{4}a^2$

Umstellen nach h_D : $h_D^2 = k^2 - \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow h_D = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}a^2}$

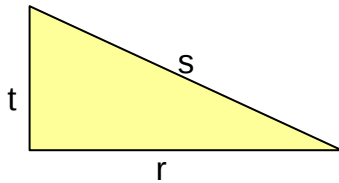
Einsetzen: $h_D = \sqrt{25^2 - \frac{1}{4} \cdot 14,3^2} \text{ cm} = 23,9557... \text{ cm} \approx 24,0 \text{ cm}$



☒ Vielleicht hast du die Dachhöhe h_D aus dem Dreieck MES berechnet. Das geht natürlich auch.

Wenn nicht, dann versuche dies jetzt noch.

2

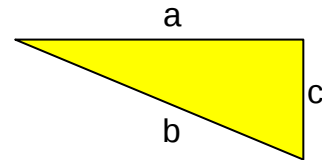


Hier ist s die Hypotenuse, r und t sind Katheten.

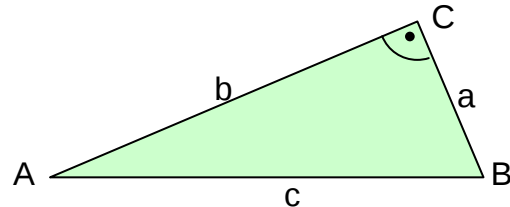
Die häufigste Darstellung sieht so aus:

Dann ist c die Hypotenuse und a und b sind die Katheten.

Doch ACHTUNG das muss nicht so sein!



Hier ist b die Hypotenuse, a und c sind Katheten.



☒ Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit diesen Maßen:

$c = 8 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$ und $\gamma = 90^\circ$

Miss die Länge der konstruierten Seite b!

22

Wenn $a = 8 \text{ cm}$ ist, folgt aus $d = a\sqrt{2}$ die Länge der Diagonalen zu $d = 8 \text{ cm} \cdot \sqrt{2} \approx 11,3 \text{ cm}$.

☒ Ein Quadrat hat eine Diagonale der Länge

a) $d = 3,6 \text{ cm}$, b) $d = \sqrt{18} \text{ cm}$

Berechne die zugehörige Quadratseite.

42

Wir kennen $a = 14,3 \text{ cm}$ und $k = 25,0 \text{ cm}$ und haben schon berechnet: $h = 22,9 \text{ cm}$.

Nun sollte die Dachhöhe h_D aus dem Dreieck MES neu bestimmt werden.

Nach Pythagoras folgt

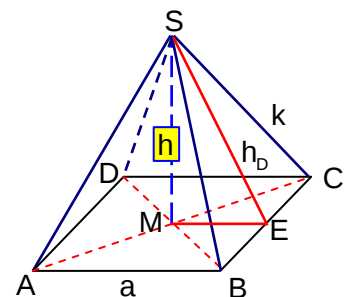
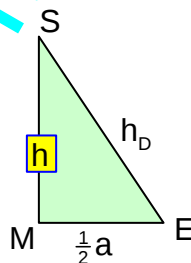
$$h_D^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$h_D = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}$$

$$\text{Eingesetzt: } h_D = \sqrt{22,9^2 + \frac{1}{4} \cdot 14,3^2} \text{ cm}$$

Rechts das Display des GTR.

Ergebnis: $h_D \approx 24,0 \text{ cm}$



$$\begin{aligned} &\sqrt{(22,9^2 + 14,3^2 \div 4)} \\ &23,99025844 \\ &\sqrt{(25^2 - 14,3^2 \div 4)} \\ &23,95574044 \end{aligned}$$

Die untere Berechnung war aus dem Abschnitt 41, die neue Berechnung zeigt davon eine Abweichung. Sie beruht auf der Verwendung von $h \approx 22,9 \text{ cm}$. Diese Zahl ist bereits gerundet und erzeugt somit die Abweichung.

☒ Eine neue Aufgabe!

Von einer anderen quadratischen Pyramide kennt man die Höhe $h = 50 \text{ cm}$ und die Dachhöhe $h_D = 70 \text{ cm}$. Berechne der Reihe nach die Grundkante a und die Dachkante k .

Baue die Lösung genau so auf wie es in 41 gezeigt worden ist!

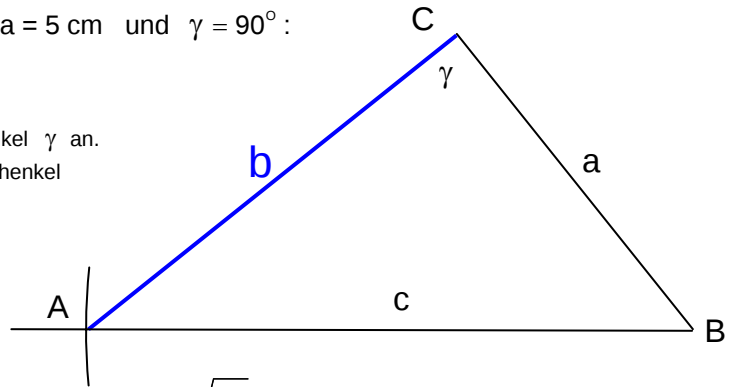
- 3 Konstruktion des Dreiecks aus $c = 8 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$ und $\gamma = 90^\circ$:

Konstruktionsbeschreibung:

Zeichne $BC = a$. Lege an BC in C einen rechten Winkel γ an.

Der Kreis um B mit Radius c schneidet den freien Schenkel von γ in A .

Die Abmessung der so konstruierten Strecke sollte etwa $6,2 \text{ cm}$ oder $6,3 \text{ cm}$ ergeben.



Ich habe diese Länge berechnet. Ihr exakter Wert ist $b = \sqrt{39} \text{ cm} \approx 6,24 \text{ cm}$.
Wir werden dies schon bald selbst berechnen lernen.

- ☒ Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit diesen Maßen:
 $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$ und $\alpha = 90^\circ$
Miss die Länge der konstruierten Seite a !

- 23 Für die Diagonale im Quadrat gilt $d = a\sqrt{2}$. Daraus folgt $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

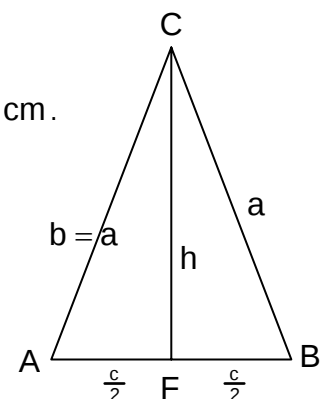
a) $d = 3,6 \text{ cm}$ ergibt daher $a = \frac{3,6}{\sqrt{2}} \text{ cm} \approx 2,5 \text{ cm}$

b) $d = \sqrt{18} \text{ cm}$ ergibt $a = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \text{ cm} = \sqrt{\frac{18}{2}} \text{ cm} = \sqrt{9} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.

Neues Thema: Das gleichschenklige Dreieck.

Ein gleichschenkliges Dreieck hat diese Eigenschaften:

- (1) Zwei Seiten sind gleich lang (hier $b = a$),
- (2) Zwei Winkel sind gleich groß,
- (3) Die Höhe zur Basis (hier c) halbiert die Basis.



Damit zerlegt h das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.

- ☒ Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Seiten $a = 8 \text{ cm}$ und $c = 6 \text{ cm}$.
Berechne die Höhe h !

43

Gegeben sind $h = 50 \text{ cm}$ und $h_D = 70 \text{ cm}$.

(1) Berechnung von a :

Im Dreieck MES gilt:

$$h_D^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = \frac{1}{4}a^2 + h^2$$

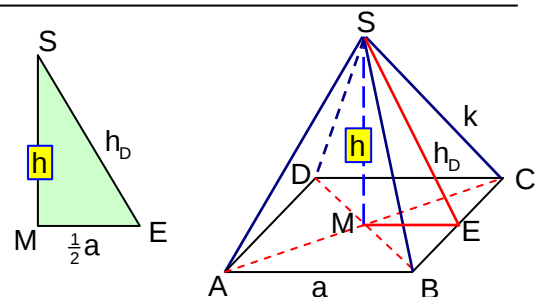
Umgestellt nach a :

$$\frac{1}{4}a^2 = h_D^2 - h^2 \quad | \cdot 4 \Rightarrow a^2 = 4(h_D^2 - h^2)$$

$$a = 2\sqrt{h_D^2 - h^2} = 2 \cdot \sqrt{70^2 - 50^2} \text{ cm} \approx 98,0 \text{ cm}$$

Wenn dies nicht geklappt hat, bitte nochmals üben.
Solche Rechnungen muss ein Schüler durchführen können!

- ☒ Wenn noch nicht geschehen, berechne jetzt auf ähnliche Weise k . Es gibt 2 Möglichkeiten!



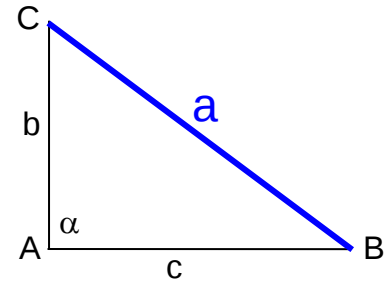
- 4** Konstruktion des Dreiecks aus $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$ und $\alpha = 90^\circ$

Konstruktionsbeschreibung:

Zeichne $AB = c$. Lege an AB in A einen rechten Winkel α an.

Trage auf dem freien Schenkel von α b ab bis C .
(Verbinde B mit C)

Die Abmessung der so konstruierten Strecke a sollte genau 5 cm ergeben!



Nun zur Berechnungsmethode. Sie wird dem altgriechischen Mathematiker Pythagoras zugeschrieben und heißt **SATZ des PYTHAGORAS**.

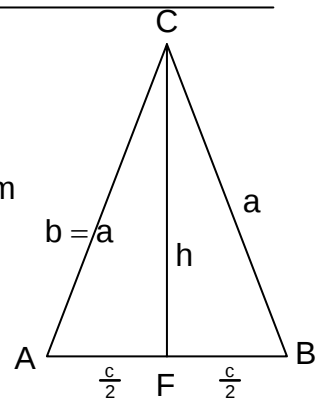
☒ Bitte umblättern!

24

Im Dreieck AFC (oder in BFC) gilt nach Pythagoras: $a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$
Mit $a = 8 \text{ cm}$ und $c = 6 \text{ cm}$ erhält man dann

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{64 - 9} \text{ cm} = \sqrt{55} \text{ cm} \approx 7,4 \text{ cm}$$

ACHTUNG: Statt $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ kann man auch $\frac{c^2}{4}$ schreiben.
FALSCH ist jedoch diese Schreibweise $\frac{c^2}{2}$ statt $\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Es muss nämlich der ganze Bruch quadriert werden und nicht nur der Zähler!

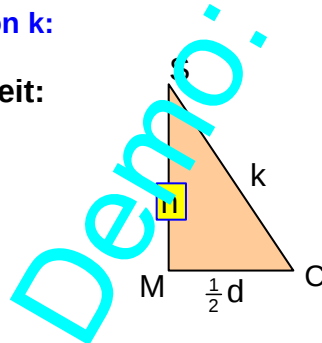


☒ Nun sei $h = 12 \text{ cm}$ und $a = 15 \text{ cm}$ gegeben. Berechne die Grundseite c !

44

(2) Berechnung von k:

1. Möglichkeit:



Im Dreieck MCS gilt: $k^2 = \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + h^2$

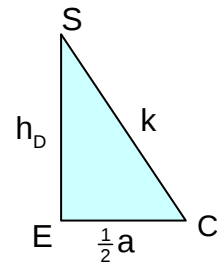
Für die Diagonale im Quadrat gilt

$d = a\sqrt{2}$ bzw. $d^2 = 2a^2$. Also folgt

$$k^2 = \frac{1}{4}d^2 + h^2 = \frac{1}{4}a^2 + h^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + h^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 98^2 + 50^2} \text{ cm} = 85,5 \text{ cm}$$

2. Möglichkeit:



Im Dreieck ECS gilt:

$$k^2 = \overline{EC}^2 + h_D^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h_D^2 = \frac{1}{4}a^2 + h_D^2$$

Also erhält man

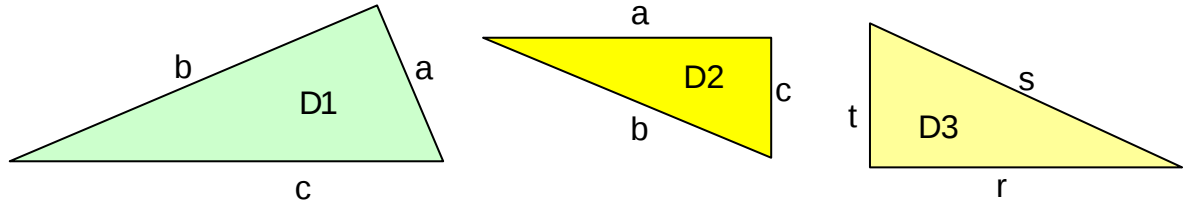
$$k = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + h_D^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 98^2 + 70^2} \text{ cm} \approx 85,4 \text{ cm}$$

☒ Wenn du diese Pyramidengeschichte nochmals üben willst, dann beginne bitte nochmals im Abschnitt **34**. Dann geht es in **45** weiter.

- 5 Der **SATZ des PYTHAGORAS** ist eine verbale Gleichung, in der die Längen der drei Dreiecksseiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen: Er lautet in Worten:

Das Hypotenusenquadrat ist gleich groß wie die Summe der Kathetenquadrate

Schauen wir uns das bei drei Dreiecken an:



Im Dreieck D1 ist c die Hypotenuse, also gilt für dieses Dreieck:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

☒ Wie lauten diese Formeln für die Dreiecke D2 und D3 ?

25

Im Dreieck AFC (oder in BFC) gilt nach Pythagoras: $a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$
Wir müssen jetzt nach c umstellen, denn c ist zu berechnen. Dazu ersetzt man $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$!! Es folgt: $\frac{c^2}{4} = a^2 - h^2 \quad | \cdot 4$ ergibt $c^2 = 4(a^2 - h^2)$

Nun die Wurzel ziehen: $c = \sqrt{4(a^2 - h^2)} = 2\sqrt{a^2 - h^2}$.

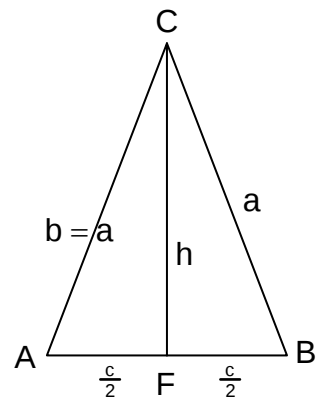
Man kann aber auch die Klammer mit der 4 ausmultiplizieren, dann sieht die Formel für c so aus: $c^2 = 4(a^2 - h^2) = 4a^2 - 4h^2 \Rightarrow c = \sqrt{4a^2 - 4h^2}$

Setzen wir $h = 12 \text{ cm}$ und $a = 15 \text{ cm}$ ein, dann folgt

$$c = 2 \cdot \sqrt{15^2 - 12^2} \text{ cm} = 2\sqrt{225 - 144} \text{ cm} = 2\sqrt{81} \text{ cm} = 2 \cdot 9 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

Bzw. $c = \sqrt{4 \cdot 15^2 - 4 \cdot 12^2} \text{ cm} = 18 \text{ cm}$ (Taschenrechner!).

Dies ist schwere Formelarbeit, die geteilt werden muss.



☒ Bitte wiederhole diese Rechnung und verwende $a = 6,8 \text{ cm}$ und $h = 2,5 \text{ cm}$.

45

Der Kathetensatz (im rechtwinkligen Dreieck:)

Die Abbildung zeigt eine Darstellung für den Satz des Pythagoras und für den Kathetensatz:

Nach Pythagoras ist $a^2 + b^2 = c^2$.

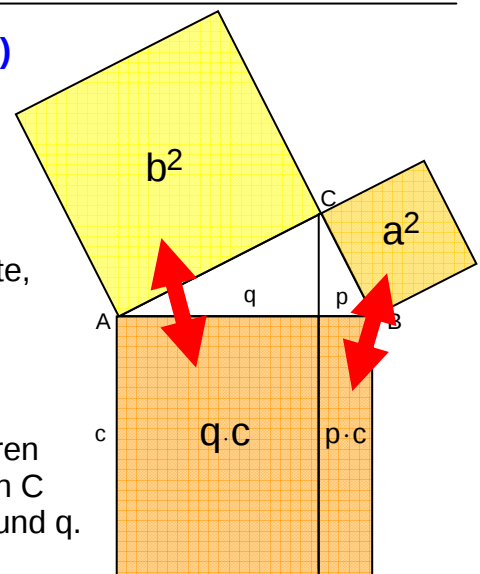
a^2 und b^2 sind die Inhalte der oberen beiden Quadrate, c^2 ist der Inhalt des unteren großen Quadrats.

Die Flächeninhalte der oberen Quadrate ergeben zusammen den Flächeninhalt des unteren Quadrats.

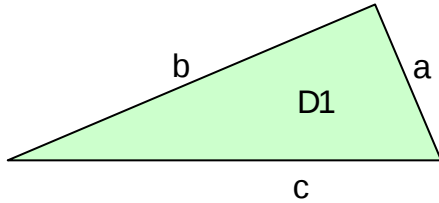
Der Kathetensatz betrachtet nur die Inhalte der oberen Quadrate für sich all ein. Zeichnet man die Höhe von C auf AB ein, entstehen die Hypotenusenabschnitte p und q.

Und es gilt: $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$.

☒ Es sei $a = 6 \text{ cm}$, $p = 2 \text{ cm}$. Berechne c, q und b.

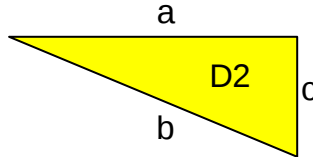


6



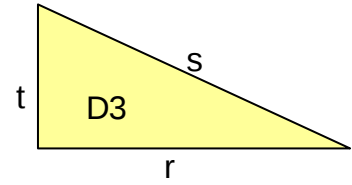
Im Dreieck D1 ist c die Hypotenuse, also gilt für dieses Dreieck:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



In D2 ist b die Hypotenuse, also gilt für dieses Dreieck:

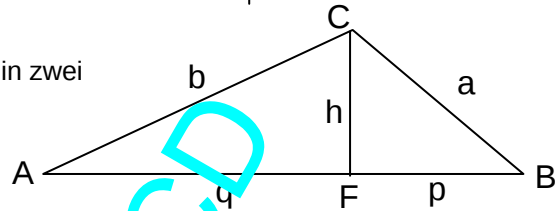
$$b^2 = a^2 + c^2$$



In D3 ist s die Hypotenuse, also gilt für dieses Dreieck:

$$s^2 = r^2 + t^2$$

☒ Das nächste Dreieck wurde durch die Höhe h in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Schreibe für beide die Formel auf, die nach dem Satz des Pythagoras gilt!



26

Musterlösung: Im Teildreieck FBC gilt $a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{c^2}{4}$

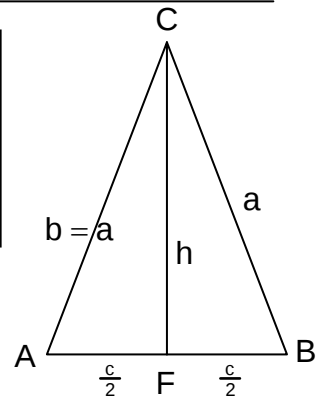
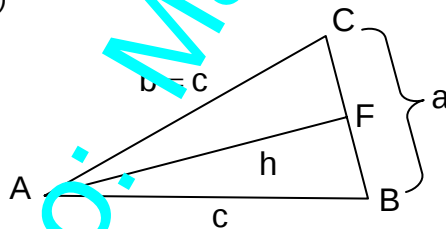
Es folgt: $\frac{c^2}{4} = a^2 - h^2 \quad | \cdot 4$ ergibt $c^2 = 4(a^2 - h^2)$

$$c = \sqrt{4(a^2 - h^2)} = 2\sqrt{a^2 - h^2} = 2\sqrt{6,8^2 - 2,5^2} \text{ cm} \approx 12,6 \text{ cm.}$$

(für $a = 6,8 \text{ cm}$ und $h = 2,5 \text{ cm.}$)

☒ Im neuen gleichschenkligen Dreieck sei $c = 24 \text{ cm}$ gegeben und $h = 20 \text{ cm}$.

Berechne a.



46

7 Usw.

Demo: Mathe-CD